33. 奇妙なアトラクターの異常なスケーリング性

九大・理　秦　浩起，森田照光，冨田浩治，
堀田武彦，森　　肇

カオスのアトラクターが，フラクタル構造を持つことはよく知られている。最近，その構造が一様でないことが特異性スペクトル $f(\alpha)$ や一般化次元 $D(q)$ を用いて研究されている。この様な構造は，カオスのダイナミックスの特徴である引き伸ばし・折り畳み機構によって形成されるので，その非一様性は引き伸ばしを記述する量である局所的不安定多様体方向の局所的軌道拡大率 $\lambda(X_i)$ の非一様性と関連がある。ここでは，この視点からカオスを捉えることを考えたい。

モデルとして可逆な２次元写像（Henon map など）を取ると，局所的軌道拡大率及び粗視化された局所的軌道拡大率は次のように定義される。

$$\lambda(X_i) \equiv \ln|T(X_i)\,\boldsymbol{u}(X_i)|$$

$$\Lambda_n(X_0) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda(X_i)$$

ここで $T(X_i)$ は点 X_i での Jacobian matrix で，$\boldsymbol{u}(X_i)$ は不安定多様体の接ベクトルである。このとき $\Lambda_n(X_0)$ は，殆どすべての初期値 X_0 に対して有名なリアプノフ指数 Λ^∞ となる。それは軌道の不安定性の強さを記述するのに有用であるが，カオスのアトラクターの多彩な構造の情報はそれからの揺らぎが握っている。その揺らぎを捉えるために次のような諸量（ scaling structure functions ）を導入する。

$$Z_n(q) \equiv \left\langle e^{-n(q-1)\Lambda_n(X_0)}\right\rangle_{X_0} \equiv e^{-n\Phi_n(q)},$$

$$\Lambda_n(q) \equiv \frac{d}{dq}\Phi_n(q) = \int d\Lambda P(\Lambda;n)\,\Lambda e^{-n(q-1)\Lambda}/Z_n(q)$$

$$\sigma_n(q) \equiv -\frac{d}{dq}\Lambda_n(q).$$

ここで $P(\Lambda;n)$ は $\Lambda_n(X_0)$ の確率分布 $P(\Lambda;n) \equiv \langle\delta(\Lambda-\Lambda_n(X_0))\rangle$ である。即ち $\Lambda_n(q)$ は $\Lambda_n(X_0)$ の q に依存した重み付き平均となっている。今 $P(\Lambda;n)$ のスペクトル

$$\phi(\Lambda) \equiv -\frac{1}{n}P(\Lambda;n)/P(\Lambda^\infty;n), \quad n \gg 1$$

を考えると $Z_n(q)$や $\Lambda_n(q)$は次のように書き直すことができる。

$$\Phi_n(q)=\min_{\Lambda}\ \{\phi(\Lambda)+(q-1)\Lambda\}$$
$$\Lambda_n(q)=\text{上の変分を与える}\ \Lambda$$

ここで $n\to\infty$の極限を取ると

$$Z_n(q)=\int d\Lambda e^{-n\{\phi(\Lambda)+(q-1)\Lambda\}}=e^{-n\Phi_n(q)}$$

$$\Lambda_n(q)=\int d\Lambda\cdot\Lambda e^{-n\{\phi(\Lambda)+(q-1)\Lambda\}}/Z_n(q)$$

となる。

つまり scaling structure functions は，カオスの特性を捉えていることになる。$\Lambda_n(q)$ は，$q\simeq 1$ の時 Λ^{∞} の近くを捉え，$q\gg 1$ の時 $\Lambda_{\min}$ を，$q\ll -1$ の時 $\Lambda_{\max}$を記述する。そこで重要なことは，$\phi(\Lambda)$の形である。これがスムーズな曲線の時は，$\Lambda_n(q)$は，$\Lambda_{\max}$ から $\Lambda_{\min}$ へ緩やかな転移を示す。一方，これが線形部を持つと $\Lambda_n(q)$ は，不連続な転移を示す。

以下では Henon map のバンド分離点を具体的な一例として示そう。これに対する $\Lambda_n(q)$，$\sigma_n(q)$ および $\phi(\Lambda)$ を図１に示した。$\phi(\Lambda)$の線形部が Λ^{∞} の両側に現れていて，これに応じて $\Lambda_n(q)$は $q=q_{\alpha}=2.0$ と，$q=q_{\beta}\simeq -0.7$ に不連続な転移を持っている。$q>q_{\alpha}$ では $\Lambda_n(q)$は $\Lambda_{\min}$ を取り，$q<q_{\beta}$ では $\Lambda_{\max}$をとる。これらは，それぞれアトラクター内の homoclinic tangency orbit の Λ_n と一周期点（バンド分離点では，一周期点に homoclinic tangency points が集積している。）近傍の軌道の Λ_n を表現している。即ちアトラクター内の特徴的な構造が，$\Lambda_n(q)$ の視点からそれぞれ別の相として取り出されたことになる。これは，q－相転移と呼ばれ，カオスのアトラクターの特徴を捉えるのに有用だと思われる。

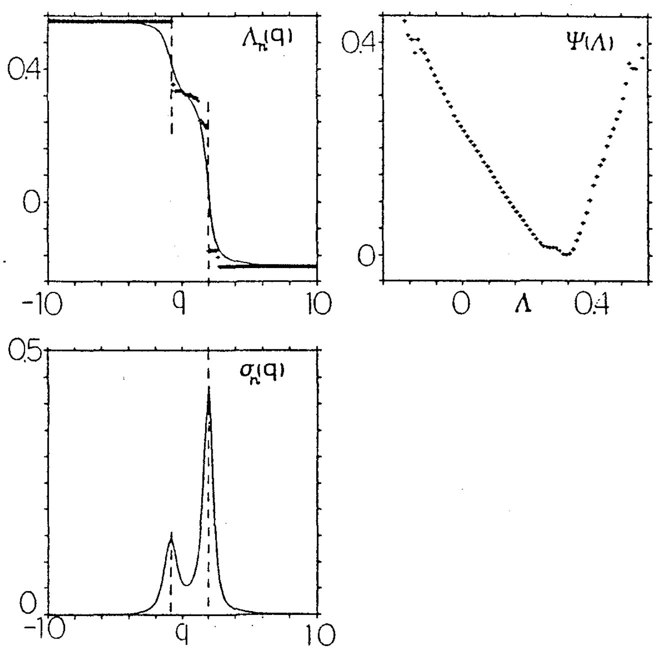

図　1

同様の q_α，q_β - 相転移は，バンド・クライシスにおいても発生し，q_α -相転移は，非双曲的なアトラクターでは常に出現し，他の種類の q - 相転移もアトラクターの構造に応じて現れることがわかる。（詳論は，準備中の論文を参照ください。）なお 1.次元写像においてもこの q - 相転移は存在する。

講演では，この他このポテンシャル $\Phi(q)$ と $f(\alpha)$ の関連についても述べた。これより $\Lambda_n(q)$ の相転移は $f(\alpha)$ にも現れることが予想される。また，$\Phi(q)$ はアトラクターに含まれる周期点によって記述されることにも触れた。これらについては T. Morita et al.,Prog. Theor. Phys. **79**. No.2 (1988) を参照下さい。

34. ノイズのある強制振動 duffing 方程式の示すリミットサイクル―カオス転移

東工大・理　小野雅也，椎野正壽

§1　はじめに

カオスを起こす系に対する熱浴の影響を、熱擾乱としてあらわに取り入れたとき、それによって系の振舞いは如何に変化するか。この問題を明らかにすることは、実験室系などのたえずノイズにさらされている系と、ノイズが無い純粋な系との対応をつけ、カオスに対する知見を新たな視点から得るという意義がある。

すでにこの問題に関していくつかの研究が行われてきた。たとえば、J．P．CrutchfieldとB．A．Hubermanは、period doubling bifurcation type のリミットサイクル－カオス転移におけるbifurcation gap の存在を発見している（1）。また、津田、松本は、B－Zモデルの一次元マップにノイズを加えることによりカオスが消失した事例を報告している（2）。

ところがその一方で、ノイズの加わることによる系の変数の分布関数を考慮し